LI Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 19 de enero de 2015

Problema 1

En el triángulo **ABC**, los ángulos **B** y **C** mide **20º** y **40º** respectivamente. Calcular la diferencia **BC − AB** en función de la longitud ℓ de la bisectriz del ángulo **A**.

Problema 2

Calcula con total exactitud el valor de la expresión: $\dfrac{2015}{1+2015^{2015}}+\dfrac{2015}{1+2015^{-2015}}$

Problema 3

Tenemos dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono los numeramos de **1** a **8**, en cualquier orden *(el orden para cada octógono puede ser diferente)*. A continuación, los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno coincida con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los **8** productos obtenidos se suman. Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que **162**.

Problema 4

La nueva ordenación del transporte en tranvía ecológico por la Ciudad Autónoma de Melilla permite enlace directo entre cualquier par de paradas, pero los tranvías viajan solamente en una dirección. Probar que existe una de dichas paradas, desde la cual se puede llegar a otra parada cualquiera, pasando a lo más por una parada intermedia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta sesión es de 3,5 horas.

LI Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 19 de enero de 2015

Problema 5

En el triángulo **ABC ,** se verifica que $B = 2C$ y $A < 90^{\circ}$. Llamamos **M** al punto medio de **BC** . La perpendicular por **C** al lado **AC** corta a la recta **AB** en el punto **D**. Demostrar que $\angle AMB = \angle DMC$.

Problema 6

Hallar los valores naturales de **x** que convierten la expresión $x^2 + 5x + 160$ en un cuadrado perfecto.

Problema 7

Busca todas las ternas (x,y,z) tales que los seis números, x, y, z, $x-y$, $y-z$ y $x-z$ sean, todos, enteros positivos y primos

Problema 8

Sea **ABCD** un cuadrado de lado unidad con **M** y **N** sobre los lados **AB** y **BC** respectivamente elegidos de forma que $\frac{AM}{MB} = 7$ y $\frac{CN}{NB} = 2$. Y sea **P** la intersección de las líneas **CM** y **DN**.

Probar que $13 \cdot \overrightarrow{AP} = 12 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AD}$ y calcular la longitud del segmento **AP**.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta sesión es de 3,5 horas.

LI Olimpiada Matemática Española

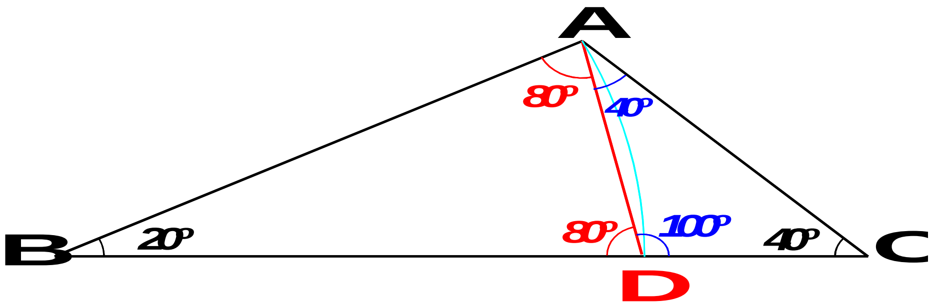
Fase Local
Melilla 19 de enero de 2015

SOLUCIONES

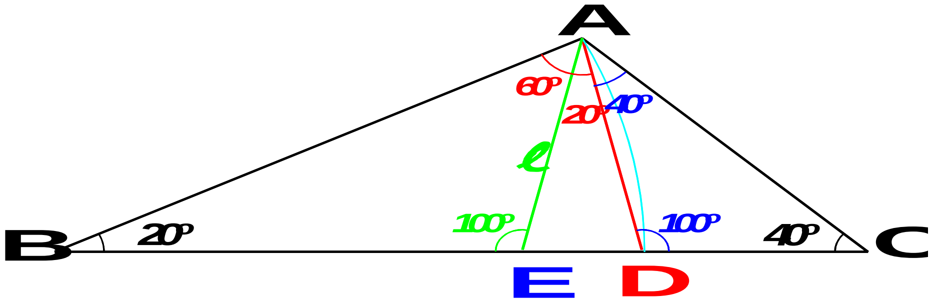
Solución Problema 1

Dibujamos la situación y, como se ve en la figura, llevamos **BA** sobre **BC** obteniendo **D**.

Así, **ABD** es un triángulo isósceles con ángulos **20º:80º:80º**. Y con el suplementario en **D**, el triángulo **ADC**, con ángulos **100º:40º:40º**, también. Por tanto, $\mathbf{AD} = \mathbf{DC}$



Y trazando la bisectriz de **A**, con pie **E** sobre **BC**, vemos que el triángulo **AED** también resulta isósceles y, en conclusión: $\mathbf{BC} - \mathbf{AB} = \mathbf{BC} - \mathbf{BD} = \mathbf{DC} = \mathbf{AD} = \mathbf{AE}$, esto es: $\underline{\mathbf{BC} - \mathbf{AB} = \ell}$



Solución Problema 2

Amplificando y simplificando adecuadamente podemos ver, en general, que:

$$\frac{n}{1+n^n}+\frac{n}{1+n^{-n}}=\frac{n}{1+n^n}+\frac{n\cdot n^n}{n^n+1}=\frac{n(1+n^n)}{1+n^n}=n$$

Y, en el caso pedido: $$\frac{2015}{1+2015^{2015}}+\frac{2015}{1+2015^{-2015}}=2015$$

Solución Problema 3

Sean x_i e y_i los números del **1** al **8** que colocamos en algún orden en los vértices del primer y segundo octógono respectivamente. Y hemos de probar que alguna de las siguientes sumas es mayor o igual que **162**:

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5+x_6y_6+x_7y_7+x_8y_8\\
S_2 &= x_1y_8+x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_5y_4+x_6y_5+x_7y_6+x_8y_7\\
S_3 &= x_1y_7+x_2y_8+x_3y_1+x_4y_2+x_5y_3+x_6y_4+x_7y_5+x_8y_6\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
S_8 &= x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_5+x_5y_6+x_6y_7+x_7y_8+x_8y_1
\end{aligned}$$

Si las sumamos todas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum S_i &= S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8=\\
&=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8)=\\
&=(1+2+3+4+5+6+7+8)(1+2+3+4+5+6+7+8)=36\cdot 36=1296
\end{aligned}$$

Y esos ocho números no pueden ser menores de **162**, de ser así, su suma no alcanzaría ese valor

$$\sum S_i = S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8 \geq 162\cdot 8 = 1296$$

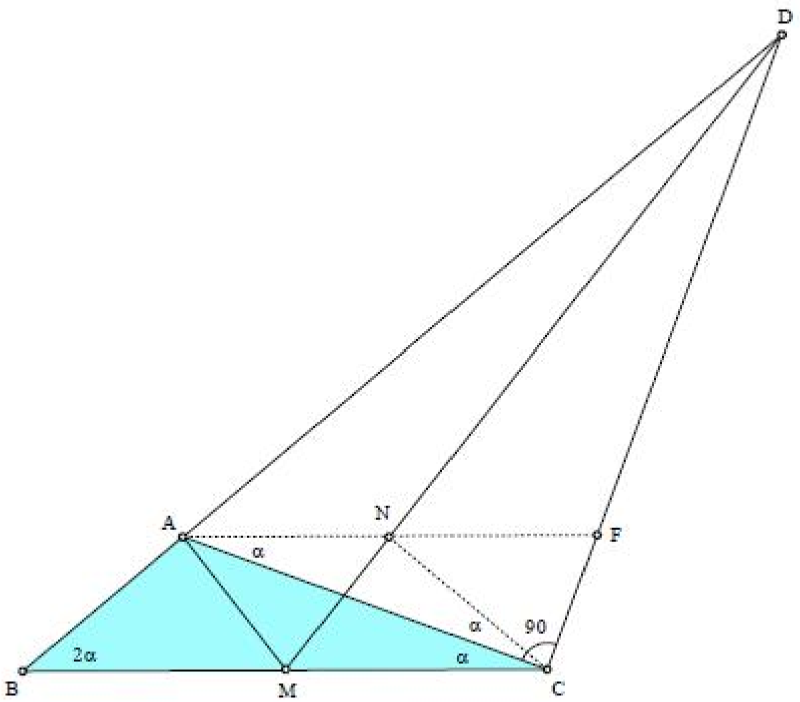
Luego debe haber algún **i** para el que $\underline{S_i \geq 162}$ c.q.d

Solución Problema 4

Llamemos **P** a la parada desde la que salen la mayor cantidad de rutas del tranvía y probemos que **P** satisface las condiciones del problema. Si no fuera así, habría una parada **Q**, a la cuál no se puede llegar desde **P** atravesando a lo más una parada intermedia. Esto implica que de **Q** sale una ruta a **P** y además de **Q** salen rutas directas a todas las paradas a las cuales también salen rutas directas de **P**. Por lo tanto, de **Q** salen más rutas que de **P**. Contradicción que prueba que **P** es la ciudad deseada.

Solución Problema 5

Dibujamos la situación. Por **A** trazamos la paralela a **BC** que corta a **DM** y a **DC** en los puntos **N** y **F** respectivamente. Como **M** es el punto medio de **BC**, por la semejanza de triángulos, **N** es el punto medio de **AF**. Y, como $\angle \mathbf{ACF} = \mathbf{90^o}$, $\mathbf{AN} = \mathbf{NC}$ y $\angle \mathbf{NAC} = \angle \mathbf{NCA} = \angle \mathbf{ACB}$, esto es, **ABCN** es un trapecio isósceles



Y, de ahí, ya es fácil deducir que, como $\mathbf{ABM} \cong \mathbf{NMC}$, $\underline{\angle \mathbf{AMB} = \angle \mathbf{DMC}}$

Solución Problema 6

Queremos que $x^2+5x+160=(x+k)^2 \quad\rightarrow\quad x^2+5x+160=x^2+2kx+k^2$

Y, despejando, $x=\dfrac{160-k^2}{2k-5}$

Para que **x** sea positivo, deben serlo numerador y denominador, esto es que $k\in\,]-\sqrt{160},\sqrt{160}[$ y, a la vez, $k>2'5$, o lo que es lo mismo, que **k** debe oscilar entre **3** y **12**: $\underline{3\le k\le 12}$

Finalmente, basta tabular para encontrar la respuesta:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	<u>151</u>	<u>48</u>	<u>27</u>	124/7	111/9	96/11	79/13	<u>4</u>	39/17	16/19

Solución Problema 7

Como $x-y$, $y-z$ y $x-z$ han de ser positivos, se tiene que $x>y>z$

Obviamente, x, y y z no pueden ser todos pares, si queremos que, a la vez, sean primos. Pero tampoco pueden ser los tres impares, pues, $x-y$ y $x-z$ serían pares y primos distintos, lo que es absurdo, pues sólo **2** es primo par. En definitiva, sólo uno de ellos podrá ser par, esto es **2**, será el menor: $z=2$

Pero $x-y$ ha de ser par y primo, por tanto, $x-y=2$

Así, los seis números primos serían: $x=y+2$, y, $z=2$, $x-y=2$, $y-z=y-2$ y $x-z=y$. Observando que, entre $y+2$, y e $y-2$, tres primos, uno de ellos ha de ser múltiplo de **3** es fácil concluir que, el menor, $y-2=3$.

Y, por tanto, la terna solicitada es única, solo puede ser: $\underline{(x,y,z)=(7,5,2)}$

Solución Problema 8

Tracemos el cuadrado sobre el eje de coordenadas: $\mathbf{A(0,0)}$, $\mathbf{B(1,0)}$, $\mathbf{C(1,1)}$ y $\mathbf{D(0,1)}$
Además: $\mathbf{M(7/8,0)}$ y $\mathbf{N(1,1/3)}$
Para determinar el punto **P**, intersecamos las rectas: $\mathbf{CM \equiv y = 8x - 7}$ y $\mathbf{DN \equiv y = -\frac{2}{3}x + 1}$ y obtenemos $\mathbf{P(12/13,5/13)}$ y, en consecuencia, $\overline{\mathbf{AP}} = \mathbf{(12/13,5/13)}$
Así, como $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{(1,0)}$ y $\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{(0,1)}$, se tiene: $\underline{\mathbf{13 \cdot \overrightarrow{AP} = 12 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AD}}}$