LIII Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 16 de enero de 2017

Problema 1

Alrededor de un círculo escribimos nueve números, bien **0** ó bien **1** y no todos ellos son **0** ni **1**. Y ahora, en cada paso escribimos, entre cada dos números un **1** si los dos números son iguales o un **0** si los dos números son distintos, y luego borramos los números dados al principio. ¿Es posible, en un número finito de estos pasos, conseguir que los nueve números sean **1**? En caso afirmativo, indicar cómo.

Problema 2

Las coordenadas del baricentro y el ortocentro de un triángulo son, respectivamente, $\mathbf{(5,-5/3)}$ y $\mathbf{(3,-1)}$, y uno de sus vértices es $\mathbf{(7,3)}$. Determina las coordenadas de los otros dos vértices.

Problema 3

Diez amigos van a un restaurante a comer. Al final, el camarero les comunica que la cuenta asciende a un total de **225** euros. Prueba que siempre podemos escoger a dos amigos de modo que entre los dos hayan pagado al menos **45** euros.

Problema 4

Dado el polinomio $\mathbf{p(x)=x^3+(t-1)x^2-(t+3)x+1}$, ¿para qué valores de $\mathbf{t}\in\Re$ la suma de los cuadrados y de los recíprocos de las raíces de $\mathbf{p(x)}$ es mínima?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

LIII Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 16 de enero de 2017

Problema 5

Determina todos los triángulos rectángulos de lados enteros en los que la magnitud de su área es igual a la magnitud de su perímetro.

Problema 6

Probar que si elegimos **100** números naturales cualesquiera, siempre habrá dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo de **99**.

Problema 7

Obtener todas las funciones $\mathbf{f:\Re\to\Re}$ reales de variable real tales que $\mathbf{f(1-x)+2f(x)=3x^2}$

Problema 8

Halla las raíces $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ y $\mathbf{r_4}$ del polinomio $\mathbf{4x^4-ax^3+bx^2-cx+5}$ sabiendo que son reales positivas y que $\mathbf{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}=1}$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

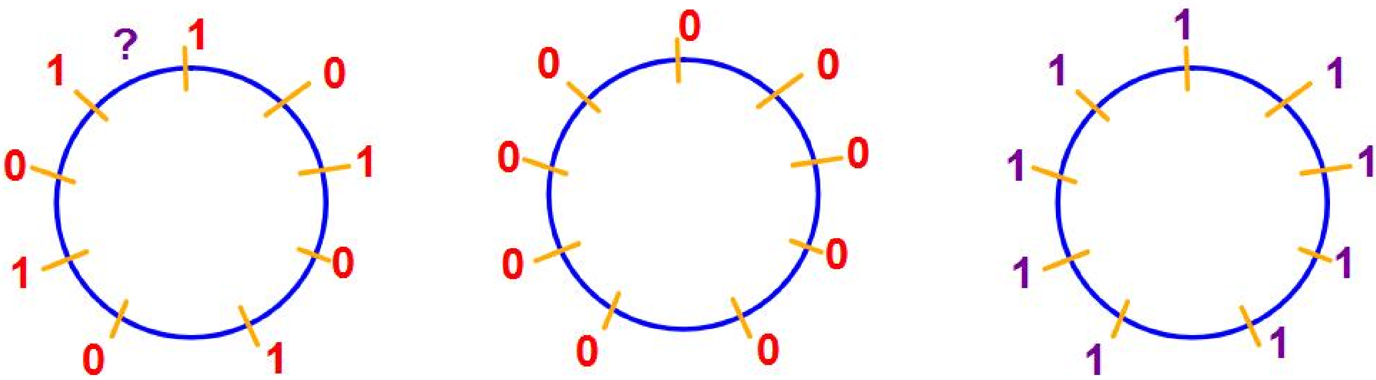
LIII Olimpiada Matemática Española

Fase Local
Melilla 16 de enero de 2017

SOLUCIONES

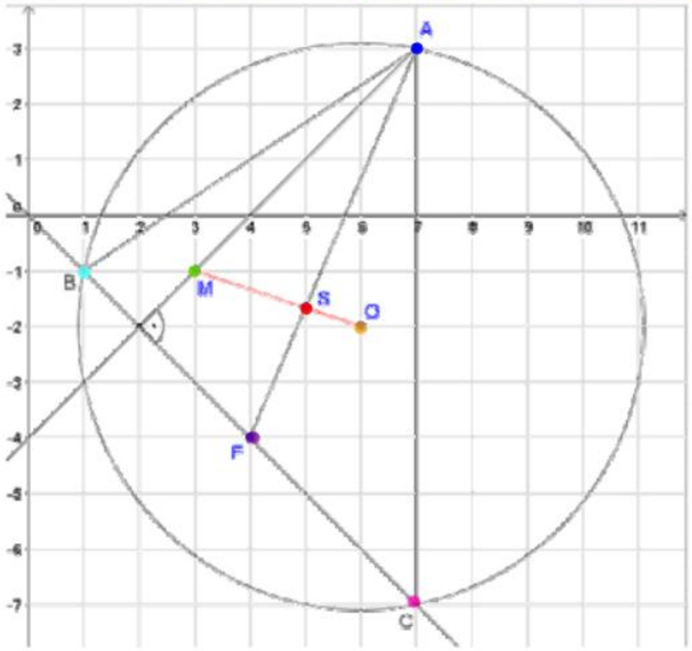
Solución Problema 1

Supongamos que hemos llegado a tener todo unos, será porque en el paso anterior todos los números eran iguales, es decir, teníamos **9** ceros. Sin embargo, para tener **9** ceros, en el paso anterior teníamos que tener todos los números alternos, ya que tenían que ser distintos cada dos. Esto es, teníamos que tener **1**, **0**, **1**, **0**, **1**, **0**, **1**, **0**, **1**, y vemos que por ser **9** un número impar, el noveno número y el primero son **1**, entre ellos se pondría un **1**, por lo que resulta imposible obtener **9** ceros, así que es imposible también llegar a tener **9** unos.



Solución Problema 2

Dibujamos la situación: $\mathbf{A(7,3)}$ es un vértice del triángulo y su baricentro y su ortocentro son, respectivamente, los puntos $\mathbf{S(5,-5/3)}$ y $\mathbf{M(3,-1)}$



Sabemos que el baricentro, **S**, divide a cualquier mediana, en este caso a **AF** como se ve en el gráfico, en dos segmentos en proporción **2:1**, esto es: $\overline{\mathbf{AS}} = \mathbf{2} \cdot \overline{\mathbf{SF}}$:

$$(-2,-14/3) = 2 \cdot (f_x - 5, f_y + 5/3) \quad \rightarrow \quad \mathbf{F(4,-4)}$$

Análogamente, sabemos que el ortocentro, **M**, el baricentro, **S**, y el circuncentro, **O**, están en la recta de Euler y también que $\overline{\mathbf{SM}} = \mathbf{2} \cdot \overline{\mathbf{SO}}$, esto es, que la distancia del baricentro al ortocentro es el doble que la distancia del baricentro al circuncentro:

$$(-2,-2/3) = 2 \cdot (o_x - 5, o_y + 5/3) \quad \rightarrow \quad \mathbf{O(6,-2)}$$

Finalmente, la intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo y la recta perpendicular a la altura **AM** que pasa por **F**, y que contiene al lado **BC**, nos dará las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo:

a) La circunferencia circunscrita al triángulo tiene el centro en $\mathbf{O(6,-2)}$ y su radio mide $\mathbf{r} = \sqrt{(7-6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26}$, por tanto su ecuación es: $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 26$

b) Como $\overline{\mathbf{AM}} = (-4,-4)$, esto es, con inclinación **1**, la recta perpendicular a AM que pasa por $\mathbf{F(4,-4)}$ será: $\mathbf{y = -x}$

Y resolviendo el sistema: $\boxed{\left.\begin{array}{r}(x-6)^2 + (y+2)^2 = 26 \\ y = -x\end{array}\right\}}$ obtenemos $\mathbf{B(1,-1)}$ y $\mathbf{C(7,-7)}$

Solución Problema 3

Supongamos que es imposible escoger a dos de ellos con esta propiedad. Emparejémoslos de alguna forma, por ejemplo, los enumeramos en cierto orden y formamos pareja con cada dos consecutivos. Llamando $\mathbf{S_{k,k+1}}$ al dinero que aportó la pareja formada por el **k** y el **(k+1)-simo** amigo, tenemos, por un lado, que: $\boxed{\mathbf{S_{1,2} + S_{3,4} + S_{5,6} + S_{7,8} + S_{9,10} = 225}}$ y, por otro, dado que cada pareja paga menos de **45 €**, que $\mathbf{S_{1,2} + S_{3,4} + S_{5,6} + S_{7,8} + S_{9,10} < 45 \cdot 5 = 225}$ y esto resulta, a todas luces, contradictorio. Por tanto siempre podremos escoger una pareja de amigos con la propiedad pedida.

Solución Problema 4

Si **a**, **b** y **c** son las raíces del polinomio $\mathbf{p(x)}$, sabemos por las relaciones de Cardano-Vieta que:

$$\mathbf{a+b+c=-(t-1)} \qquad \mathbf{ab+bc+ca=-(t+3)} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{abc=-1}$$

Así: $\quad \mathbf{S_c = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (t-1)^2 + 2(t+3)} \qquad$ y

$$\mathbf{S_r = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = t+3}$$

Y queremos averiguar cuándo es mínima la expresión: $\mathbf{S = S_c + S_r = (t-1)^2 + 3(t+3)}$, cosa que se puede determinar sin cálculo diferencial alguno, basta ver que se trata de una parábola y con encontrar su vértice nos basta:

$$\mathbf{S = (t-1)^2 + 3(t+3) = t^2 + t + 10 = (t+0'5)^2 + 9'75}$$

El mínimo se alcanza en $\mathbf{t=-0'5}$ y es **9’75**.

Solución Problema 5

Denominando **a** y **b** a las longitudes de los catetos, hemos de resolver la siguiente ecuación:

$$A=\frac{1}{2}ab=a+b+\sqrt{a^2+b^2}=p \quad\rightarrow\quad \sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ab}-\mathbf{a}-\mathbf{b} \quad\rightarrow$$

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ab}-\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)^2=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2+\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-\mathbf{a}^2\mathbf{b}-\mathbf{ab}^2+\mathbf{2ab} \quad\rightarrow$$

$$\mathbf{0}=\mathbf{ab}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ab}-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{2}\right) \quad\rightarrow\quad \mathbf{0}=\mathbf{ab}-\mathbf{4a}-\mathbf{4b}+\mathbf{8} \quad\rightarrow$$

$$\mathbf{a(b-4)}=\mathbf{4b-8} \quad\rightarrow\quad \mathbf{a}=\frac{\mathbf{4b-8}}{\mathbf{b-4}}=\mathbf{4}+\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{b-4}}$$

Luego $\mathbf{b-4}$ ha de dividir a **8**

<u>Casos:</u>

$\underline{\mathbf{b-4=1}}$ $\quad \mathbf{a=12}$, $\mathbf{b=5}$ y $\mathbf{c}=\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}=\mathbf{13}$

$\underline{\mathbf{b-4=2}}$ $\quad \mathbf{a=8}$, $\mathbf{b=6}$ y $\mathbf{c=10}$

$\underline{\mathbf{b-4=4}}$ $\quad \mathbf{a=6}$, $\mathbf{b=8}$ y $\mathbf{c=10}$ solución similar a la anterior.

$\underline{\mathbf{b-4=8}}$ $\quad \mathbf{a=5}$, $\mathbf{b=12}$ y $\mathbf{c=13}$ solución similar a la primera.

En conclusión, dos son los triángulos rectángulos con área y perímetro de igual magnitud, el de lados $\boxed{\textbf{6, 8 y 10}}$ y el de lados $\boxed{\textbf{5, 12 y 13}}$.

Solución Problema 6

Dividamos los **100** números elegidos entre **99**. Sabemos que al dividir un número entre **99** se pueden obtener **99** restos distintos, del **0** al **98**, por tanto, de esas cien divisiones, seguro que hay, al menos dos que han dejado el mismo resto.

Sean **a** y **b** los dos números que han dejado el mismo resto: $\mathbf{a} = \mathbf{99} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{r}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{99} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{r}$.

Luego $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overset{*}{\mathbf{99}}$ como queríamos ver

Solución Problema 7

Las funciones cumplen $\mathbf{f(1-x)+2f(x)=3x^2}$ y, substituyendo en esta expresión $\mathbf{x}$ por $\mathbf{1-x}$, tenemos también: $\mathbf{f(x)+2f(1-x)=3(1-x)^2}$.

De estas dos expresiones se puede eliminar el término $\mathbf{f(1-x)}$ multiplicando por 2 la primera y restándole la segunda y nos queda: $\mathbf{3f(x)=6x^2-3(1-x)^2}$

Y, de aquí, la única función que cumple la propiedad pedida: $\mathbf{f(x)=x^2+2x-1}$

Solución Problema 8

Por Cardano-Vieta sabemos que $\mathbf{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{5}{4}}$ y por la desigualdad de las medias MA y MG:

$$\mathbf{1 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{2^8}} = 1}$$

Y al darse la igualdad: $\mathbf{\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}}$

Por tanto: $\mathbf{r_1 = 0'5}$, $\mathbf{r_2 = 1}$, $\mathbf{r_3 = 1'25}$ y $\mathbf{r_4 = 2}$